Lycée Grand Nouméa
ECT 1
A. DA SILVA

Devoir maison confinement

Année 2021

1 Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{4}{x}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. (a) *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + 1 + \frac{4}{x} = +\infty + 1 + \underbrace{\frac{4}{+\infty}}_{=0} = \boxed{+\infty}$$

(b) *Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?*
La droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$

(c) *Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de f.*
Rappel de cours :

Asymptotes obliques

La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ si

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

On calcule donc $f(x) - (x + 1)$ (⚠ sans oublier les parenthèses !!)

$$\begin{aligned} f(x) - (x+1) &= x + 1 + \frac{4}{x} - (x+1) \\ &= x + 1 + \frac{4}{x} - x - 1 \qquad \text{(on change les signes dans la parenthèse)} \\ &= \frac{4}{x} \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = \frac{4}{+\infty} = 0$
Par suite, $\boxed{\text{la droite d'équation } y = 0 \text{ est bien asymptote à la courbe}}$.

2. (a) *Calculer la dérivée de f. En déduire le sens de variation de f sur* $]0,+\infty[$. D'après les formules du cours, $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$.
Ici il est fortement conseillé de mettre au même dénominateur. Il faut se souvenir que la forme la plus factorisée possible (un produit ou un quotient) permettra

d'utiliser ensuite la règle des signes pour trouver le signe de la dérivée.

$$\begin{aligned} 1-\frac{4}{x^2} &= \frac{1}{1}-\frac{4}{x^2} \\ &= \frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2} \\ &= \frac{x^2-4}{x^2} \\ &= \frac{x^2-4}{x^2} \end{aligned}$$

Ici il est astucieux de remarquer qu'il y a une identité remarquable

$$x^2-4=x^2-2^2=(x+2)(x-2)$$

, mais on peut tout de même réussir la suite même si on ne le voit pas.

Finalement $\boxed{f'(x)=\frac{x^2-4}{x^2} \quad \left(=\frac{(x+2)(x-2)}{x^2}\right)}$

(b) *Déduire des questions précédentes le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites trouvées en 1.a)*

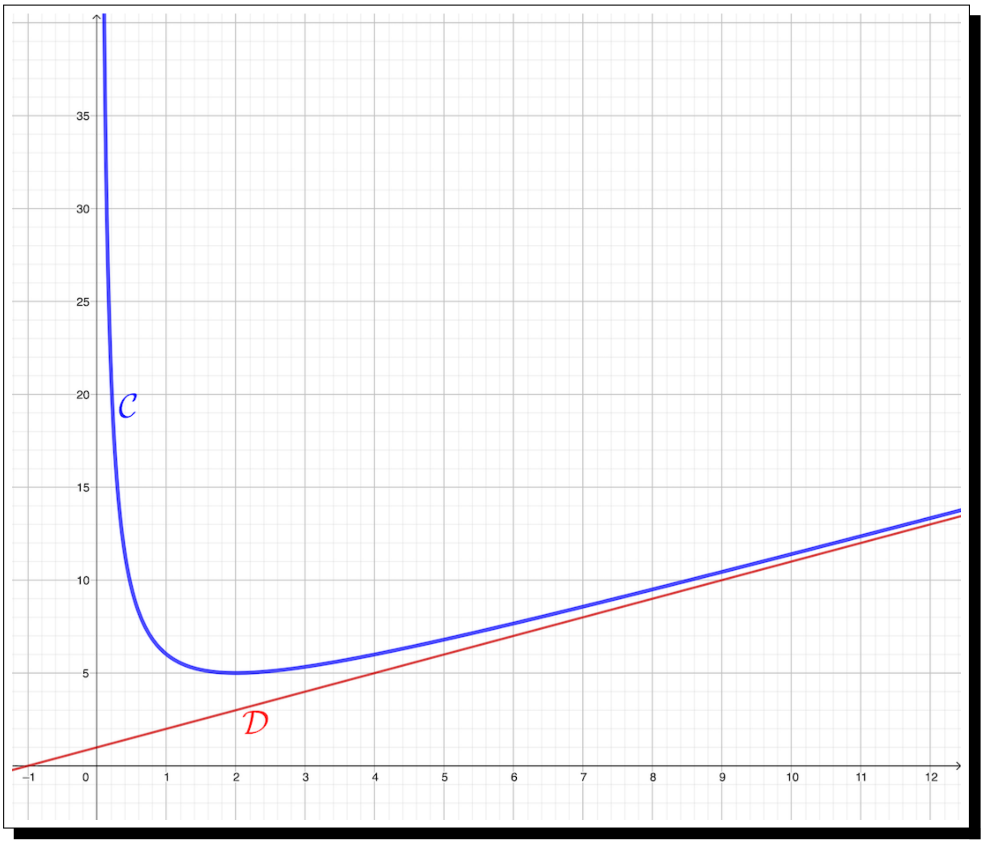
Puisque x^2 est toujours positif, le signe de $f'(x)$ est déterminer par celui de x^2-4 qui est un polynôme du second degré. On trouve 2 et -2 pour racine, mais il ne faut pas oublier que f est définie sur $]0,+\infty[$, on ne garde donc que 2. Ensuite x^2-4 est négatif entre -2 et 2 donc entre 0 et 2 (signe contraire de a) et positif entre 2 et $+\infty$ (signe de a).

Ceci mène au tableau de variation suivant :

x	0		2		$+\infty$
x^2-4		$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

3. *Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormé d'unité $2cm$.*

L'allure est la suivante (les unités ne sont pas respectées ici) :



2 Exercice 2 :

Soit f définie par $f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 21$ sur $\mathbb{R}$

1. *Calculer* $f(1)$

   $\boxed{f(1) = 0}$

2. *Calculer* f' *puis montrer que* $f''(x) = 12(x^2 - 2x - 3)$

   On calcule successivement $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 36x$ et $f''(x) = 12x^2 - 24x - 36 = 12(x^2 - 2x - 3)$

3. *A l'aide du cours, montrer alors que* f *admet deux points d'inflexions.*

   On résout $f''(x) = 0$, ce qui équivaut à $x^2 - 2x - 3$. On calcule Δ et on trouve deux racines -1 et 3.

   Conclusion : f'' s'annule en $x = -1$ et en $x = 3$ en changeant de signe (faire le tableau de signe), $\boxed{\text{il y a donc bien deux points d'inflexion.}}$