Matrices 1 : exercices supplémentaires

1 Rappel : Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est une **méthode** de démonstration. On peut l'utiliser lorsque l'on est confronté à une question du type :

« Montrer que pour tout entier n plus grand que **0 (ou 1 ou 2...ou un entier** n_0**))** , on a [**une propriété qui dépend de** n]

La propriété est souvent notée $\mathcal{P}_n$ où l'indice n montre qu'elle dépend de n.

Principe de démonstration en 3 étapes :

Initialisation.
Pour $n = n_0$, on vérifie que la propriété $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie.

Hérédité.
Il faut montrer que :
Pour tout entier $n \geq n_0$, si la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie alors la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion.
D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Dans les récurrences le point le plus difficile est de montrer l'hérédité, mais dans le cas des récurrences faisant intervenir des matrices, le principe est toujours à peu près le même :

Point méthode pour les récurrences matricielles

En ECT, la récurrence est souvent à utiliser dans des exercices sur les matrices, dans des questions du type :
Montrer que pour tout entier n plus grand que 0 (ou 1), on a

$$M^n = (uneformule)$$

Initialisation.
Pour $n = n_0$, on vérifie que la propriété $M^{n_0} = ...$ est vraie. Si la propriété est à montrer pour $n_0 = 0$ alors il faut se souvenir que l'on a toujours

$$\boxed{M^0 = I \text{ (matrice identité)}}$$

Hérédité.
On suppose que $M^n = ...$ et on veut démontrer que $M^{n+1} =$ la formule où l'on remplace n par $n+1$
On utilise toujours le fait que

$$\boxed{M^{n+1} = M \times M^n}$$

Exemple résolu

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

Nous allons résoudre cet exercice en utilisant une récurrence. On note $\mathcal{P}_n$ la propriété « $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ »

Initialisation.

On nous demande de montrer que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $n_0 = 0$.

Il faut donc démontrer que $M^0 = \begin{pmatrix} 2^0 & 0 \\ 0 & (-1)^0 \end{pmatrix}$ est vraie. Or d'une part : $M^0 = I_2$ (cf.point méthode précédent).

Et d'autre part : $2^0 = (-1)^0 = 1$. Donc $\begin{pmatrix} 2^0 & 0 \\ 0 & (-1)^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ce qui montre que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang $n = 0$

Hérédité.

Soit n un entier naturel **fixé**. On suppose que $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ et on va démontrer que $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$

On écrit

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \quad \text{d'après } \mathcal{P}_n \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 2^n + 0 & 2 + 0 \times (-1) \\ 0 \times 2^n + (-1) \times 0 & 0 + (-1) \times (-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. On sert ici du fait que si a est un nombre réel (positif ou négatif), $a \times a^n = a^{n+1}$

Conclusion.

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 0$, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

2 Exercices

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2, A^3
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$

Exercice 3

Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer N^2 puis en déduire par récurrence que $N^n = 0$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

Exercice 4 (*Vu en TP Scilab*)

On pose $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer C^2, C^3, C^4
2. Démontrer par récurrence que $C^n = 3^{n-1}.C$