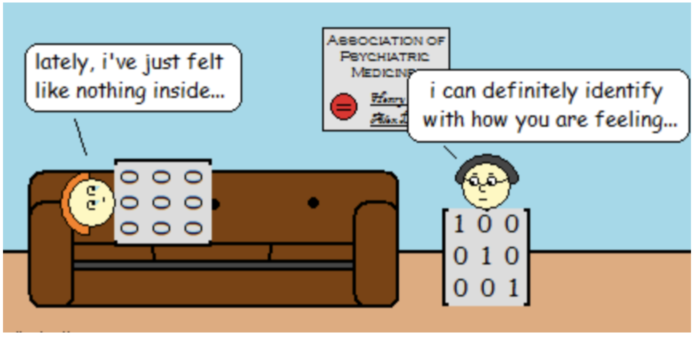
Matrices 2 : Cours



1 Rappel

Définition

Soit A une matrice carrée. On dit que A est inversible s'il existe une matrice B telle que $A \times B = B \times A = I$. B est alors appelée l'inverse de A et notée A^{-1}.

Remarque importante : Si on trouve $A \times B = I$, on a automatiquement $B \times A = I$ sans avoir besoin de le vérifier. C'est un théorème puissant qui est admis en ECT.

2 Différentes méthodes pour trouver l'inverse d'une matrice

2.1 Cas où la matrice est proposée

Dans les exercices, on peut nous donner A et B et nous inviter à calculer $A \times B$.

Deux cas

- Si on trouve $A \times B = I$, on en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = B$
- Si on trouve $A \times B = \alpha.I$ où α est un nombre réel, alors on en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}.B$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On calcule : $A \times B$ et on trouve $A \times B = 2I$. En multipliant par $\dfrac{1}{2}$ des deux côtés de l'égalité on trouve $A \times \left(\dfrac{1}{2}B\right) = I$ donc $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{2}.B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

2.2 Cas où on connait une relations sur la matrice

Méthode

Lorsqu'on connait une relation algébrique sur A, on traite l'égalité de façon à la mettre sous la forme

$$A \times (........) = I$$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Le texte demande de montrer que $A^2 = 4A - 3I$, ce qu'on fait par le calcul.

Ensuite, on met A en facteur : $A(A - 4I) = -3I$

On multiplie par $\dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$: $A\left(-\dfrac{1}{3}(A - 4I)\right) = I$.

On en déduit que A est inversible et que $\boxed{A^{-1} = -\dfrac{1}{3}(A - 4I) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}$

2.3 Méthode par système linéaire

Un système linéaire de dimensions 2×2 est un couple d'équations de la forme : $\begin{cases} 2x & + & 3y & = & u \\ x & + & 2y & = & v \end{cases}$

On peut mettre en forme ce système au moyen d'une matrice : $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

Pour trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on cherche à résoudre le système $AX = Y$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, en donnant la solution sous la forme $X = A^{-1}Y$.

Ainsi, $\left\{\begin{array}{rcrcl|l} 2x & + & 3y & = & u & \\ x & + & 2y & = & v & 2\times L_2 \to L_2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcl|l} 2x & + & 3y & = & u & \\ 2x & + & 4y & = & 2v & L_1 - L_2 \to L_2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcl|l} 2x & + & 3y & = & u & \\ & & -y & = & u-2v & L_1 + 3L_2 \to L_1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrcl|} 2x & & = & 4u-6v \\ & -y & = & u-2v \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrcl|} x & & = & 2u-3v \\ & y & = & -u+2v \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

Donc finalement on a trouvé l'inverse de A et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.4 La formule pour les matrices 2×2

On peut résoudre le système précédent de manière tout à fait générale, et trouver ainsi une formule générale de l'inverse d'une matrice. Nous nous limiterons au cas d'une matrice 2×2 car au-delà les formules sont excessivement grandes.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 quelconque. Nous allons déterminer A^{-1} en résolvant le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl|l} ax & + & by & = & u & dL_1 - bL_2 \to L_1 \\ cx & + & dy & = & v & -cL_1 + aL_2 \to L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrcl} (ad-bc)x & & = & du - bv \\ & (ad-bc)y & = & -cu + av \end{array}\right.$$

Donc $(ad-bc)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, donc si $ad-bc \neq 0$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{(ad-bc)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Inverse d'une matrice 2×2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2.

A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et dans ce cas $A^{-1} = \dfrac{1}{(ad-bc)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

2.5 Le pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss permet de calculer l'inverse d'une matrice par étapes. En fait elle consiste à résoudre un système linéaire sans s'encombrer des x, y, u, v ....

Par exemple, soit à inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On résout le système $\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & u \\ 3x & + & 2y & + & z & = & v \\ 4x & + & & & 3z & = & w \end{array} \right.$,

écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} L_2 - L_1 \to L_1 \\ \\ \\ \end{array} \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

On égalise le coefficient a_{11} à 1

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ L_2 - 3L_1 \to L_2 \\ L_3 - 4L_1 \to L_3 \end{array} \left\| \begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

On fait apparaître des 0 dans le reste de la premièr

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ -L_2 \to L_2 \\ \\ \end{array} \left\| \begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{array} \right|$$

On égalise le coefficient a_{22} à 1

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} L_1 - L_2 \to L_1 \\ \\ L_3 + 4L_2 \to L_3 \end{array} \left\| \begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{array} \right|$$

On fait apparaître des 0 dans les reste de la 2^{e} colo

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ -L_3 \to L_3 \end{array} \left\| \begin{array}{ccc} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -8 & 4 & 1 \end{array} \right|$$

On égalise le coefficient a_{33} à 1

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} L_1 - L_3 \to L_1 \\ L_2 + L_3 \to L_2 \\ \\ \end{array} \left\| \begin{array}{ccc} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & -1 \end{array} \right|$$

On égalise le reste des coefficients de la 3^{e} colonne

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \left\| \begin{array}{ccc} -6 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 8 & -4 & -1 \end{array} \right|$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 8 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

3 Puissances n$^{\text{ième}}$ d'une matrice

Puissance nième

Pour toute matrice A et tout entier $n \geq 1$, on définit $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ facteurs}}$,

et si A est inversible, on définit $A^{-n} = \underbrace{A^{-1} \times A^{-1} \times \cdots \times A^{-1}}_{n \text{ facteurs}}$.

Par convention $A^0 = I$.

3.1 Cas des matrices diagonales

Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & \mu^n & 0 \\ 0 & 0 & \nu^n \end{pmatrix}$.

3.2 Formule du binôme

Formule du binôme

Si A et B sont deux matrices qui commutent,

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$

Exemple. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$. Montrer que $M = A + B$, avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $B^2 = 0$, et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = A^n + nA^{n-1}B$.

3.3 Relation de récurrence

Exemple (d'après ESC 2016).

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $AP = PD$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n P = PD^n$.
3. Déterminer P^{-1} et en déduire l'expression de A^n.