ESC 2010 : corrigé

Exercice 1

1. (a) $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $N^3 = 0$ donc $(A-I)^3 = 0$ donc $(X-1)^3$ est un polynôme annulateur de la matrice A.

   (c) Les valeurs propres possibles de A sont les racines de $(X-1)^3$ donc, 1 est la seule valeur propre possible.

   (d) Si matrice A était diagonalisable il existerait P une matrice inversible telle que $A = P.D.P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

   On aurait donc l'égalité $A = P.I_3.P^{-1} = P.P^{-1} = I_3$ ce qui est faux. Donc A n'est pas diagonalisable.

2. $$\begin{aligned} A^n = (N+I)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k.I^{m-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \\ &= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 + \binom{n}{2} N^2 + \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{=0 \text{ car } N^3=N^4=\ldots=0} \\ &= I + n.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Cette formule reste encore valable lorsque $n = 0$ et lorsque $n = 1$?

3. (a) Par la méthode du pivot, on trouve $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) La formule de la question 2/ est encore valable lorsque $n = -1$ car dans ce cas $\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{-1(-2)}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. (a) $z_{n+1} = z_n$ donc la suite (z_n) est une suite constante égale à $z_0 = 1$.

   (b) $y_{n+1} = y_n + z_n = y_n + 1$, donc (y_n) est une suite arithmétique de raison 1, donc $y_n = y_0 + r.n = 1 + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. (a) $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0+1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ n+2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n + y_n \\ n+2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n + 1 + n \\ n+2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_n \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix} = A.X_n$$

(b) Par récurrence : voir cours.

(c) $X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

La lecture de la première coordonnée donne $x_n = 1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2} = \boxed{\dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2} + 1}$

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1-u_n) \end{cases}$

La fonction f est définie sur $[0;1]$ par $f(t) = t(1-t)$.

1. (a) $f'(t) = 1(1-t) + t.(-1) = 1 - 2t$ qui s'annule en $t = \dfrac{1}{2}$, ce qui mène au tableau de variation :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

(b) Par récurrence (à rédiger) :

- Initialisation : $u_0 = \dfrac{1}{2} \in [0; \dfrac{1}{2}]$
- Hérédité : Supposons que $u_n \in [0; \dfrac{1}{2}]$.

  Alors d'après le tableau de variation $u_{n+1} = f(u_n) \in [0; \dfrac{1}{4}]$ donc plus largement $u_{n+1} \in [0; \dfrac{1}{2}]$, ce qui montre l'hérédité.
- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; \dfrac{1}{2}]$

(c) $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ donc $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante. De plus elle est minorée par 0, elle est donc convergente.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$, mais comme $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$,
on a aussi $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = l(1-l)$.
Comme la limite est unique on a $l = l(1-l) = l - l^2$.
Donc $l^2 = 0$ et donc $l = 0$.

2. On définit pour tout entier naturel non nul n : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k^2$.

(a) Pour tout entier naturel k, $u_k - u_{k+1} = u_k - u_k(1-u_k) = u_k^2$

(b) On a une somme télescopique, pour tout entier naturel non nul n :
$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k^2 = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k - u_{k+1} = u_0 - u_n = \frac{1}{2} - u_n$.

(c) Pour vérifier que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une loi de probabilité, il suffit de vérifier les point suivants :

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} u_k \in [0;\frac{1}{2}] &\Longrightarrow u_k^2 \in [0;\frac{1}{4}] \quad \text{(par croissance de la fonction carrée)} \\ &\Longrightarrow 2.u_k^2 \in [0;\frac{1}{2}] \\ &\Longrightarrow p_k \in [0;1] \end{aligned}$$

- $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} p_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} p_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} 2.u_k^2 &= \lim_{n\to\infty} 2.(\frac{1}{2} - u_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 - 2u_n = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Exercice 3

1. (a)

```
function n=de()
        tirage=grand(1,1,''uin'',1,6)
        if tirage==6 then n=1
        else n=0
        end
 endfunction
```

(b)

```
function n=piece()
        n=grand(1,1,''uin'',0,1)
 endfunction
```

(c)
```
Y=0
if de()= 1 then Y=piece()+piece()
else Y= piece()
end
disp(Y)
```

2. (a) X suit une loi uniforme dans l'intervalle d'entier $[\![1,6]\!]$ puisque le dé est équilibré.
   (b) Formules du cours :
   $E(X)=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{1+6}{2}=3.5$ et $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{(6-1)^2}{12}=\dfrac{25}{12}$.
3. Pour obtenir 2 piles, il faut et il suffit d'obtenir un 6 au jet du dé (probabilité $\dfrac{1}{6}$, puis deux fois piles au deux lancer de pièce (probabilité $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$).

$$\boxed{P(Y=2)=P\left([Y=2]\cap[X=6]\right)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}}$$

4. (a) Pour $k\in\{1,2,3,4,5\}$, $P_{[X=k]}(Y=0)$ représente la probabilité d'obtenir zéro pile après avoir obtenu k au lancer du dé. Comme il n'y a alors qu'un seul lancer de pièce, cette probabilité vaut $\dfrac{1}{2}$.
   (b) $P_{[X=6]}(Y=0)$ représente la probabilité d'obtenir zéro pile après avoir obtenu 6 au lancer du dé. Comme il y a deux lancers de pièce, cette probabilité vaut $\dfrac{1}{4}$.
   On applique la formule des probabilités totales avec $([X=k])_{k\in\{1,2,3,4,5,6\}}$ pour système complet d'évènement :

$$\begin{aligned}P(Y=0)&=\sum_{k=1}^{6}P_{[X=k]}(Y=0).P(X=k)\\&=5\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}\qquad\text{(les probabilités sont les mêmes pour } k \text{ variant de 1 à 6)}\\&=\boxed{\frac{11}{24}}\end{aligned}$$

   (c) Y prenant les valeurs 1,2 et 3 ont obtient que $P(Y=1)=1-\dfrac{11}{24}-\dfrac{1}{24}=\dfrac{12}{24}=\dfrac{1}{2}$
   On peut donner le résultat sous forme de tableau :

k	0	1	2
$P(Y=k)$	$\dfrac{11}{24}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{24}$

   L'espérance est $E(Y)=0\times\dfrac{11}{24}+1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{1}{24}=\boxed{\dfrac{7}{12}}$

5. (a) La loi du couple (X,Y) est donnée par le tableau suivant (on vérifie que la somme des cellules fait bien 1) :

$Y \backslash X$	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	0	0	0	0	0	$\frac{1}{24}$

(b) $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
Rappel : La tableau permet de calculer $E(XY)$ en faisant la somme des $x_i y_i P([X = x_i] \cap [Y = y_i]))$:

$$E(XY) = \frac{1}{12}(1+2+3+4+5+6) + 6 \times 2 \times \frac{1}{24} = \frac{21}{12} + \frac{6}{12} = \frac{27}{12}$$

D'où :

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{27}{12} - \frac{7}{2} \times \frac{7}{12} = \boxed{\frac{5}{24}}$$

Exercice 4

1. (a) $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{1}{2} t = 0$ donc f est continue en 0.
Même si le texte ne le demande pas il peut être utile de représenter la fonction f :

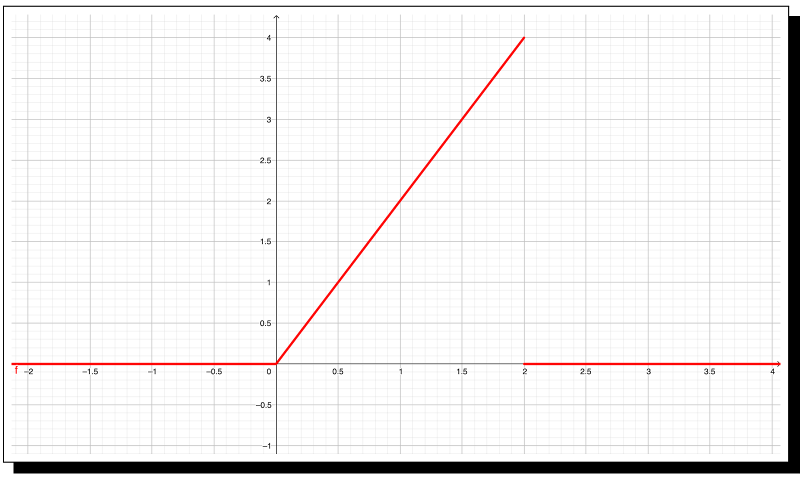

FIGURE 1 – La fonction f

f est une densité de probabilité car :

- f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ avec un seul point de discontinuité (pour $x = 2$) ;
- f est positive ;
- La valeur de l'intégrale de f sur $]-\infty; +\infty[$ est bien 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^2 \frac{1}{2}tdt = \left[\frac{1}{2}\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = 1$$

(b) D'après le cours $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Il y a donc trois cas :

- Si $x \leq 0$, $F(x) = 0$
- Si $0 < x \leq 2$, $F(x) = \int_0^x \frac{1}{2}tdt = \left[\frac{1}{2}.\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{x^2}{4}$
- Si $x > 2$, $F(x) = 1$

(c)
- $P(X \leq 1) = F(1) = \frac{1^2}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$
- $P(\frac{1}{2} < X \leq 1) = F(1) - F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \boxed{\frac{3}{16}}$

(d) Il semble y avoir une petite erreur dans cette question. On peut seulement affirmer que X est à valeur dans $[0; 2]$ presque surement , mais c'est hors-programme.

2.
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^2 \frac{t^2}{2}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2} \times \frac{2^3}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

3. Si on admet que $X(\Omega) = [0, 2]$ alors $U(\Omega) = [0; 4]$. Et :
   - Si $x \leq 0$, $G(x) = P(U \leq x) = P(X^2 \leq x) = 0$ (distinguer $x = 0$ et $x < 0$)
   - Si $x > 4$, $G(x) = P(X^2 \leq 4) = P(X \leq 2) = F(2) = 1$ d'après la question précédente.

4. (a) $U \leq 2 \iff X^2 \leq 2 \iff -\sqrt{2} \leq X \leq \sqrt{2}$. Donc :

$G(2) = P(U \leq 2) = P(-\sqrt{2} \leq X \leq \sqrt{2}) = F(\sqrt{2}) - F(-\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2})^2}{4} - 0 = \boxed{\frac{1}{2}}$

(b) On procède de la même manière :

Si $0 < x \leq 4$, $G(x) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) = \frac{(\sqrt{x})^2}{4} - 0 = \frac{1}{4}x$.

(c) On a donc :

$$G(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{4}x \text{ si } 0 < x \leq 4 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

On reconnait une loi uniforme sur $[0, 4]$, donc $X \sim \mathcal{U}([0, 4])$

(d)
- $E(U) = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{0+4}{2} = \boxed{2}$
- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(U) - \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = 2 - \dfrac{16}{9} = \boxed{\dfrac{2}{9}}$