Concours blanc n° 1

Cette correction est personnelle et ne constitue pas un modèle de rédaction.

1 Exercice 1 : Matrices

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 = 4A - 4I$.

   Réponse : En rédigeant les calculs on obtient :

   D'une part :

   $$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

   D'autre part :

   $$4A - 4I = 4 * \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} - 4. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

   Conclusion : $A^2 = 4A - 4I$

2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

   Réponse : D'après la question précédente, $A^2 - 4A = -4I$ donc $A(A - 4A) = -4I$ et donc $A\left(-\frac{1}{4}.(A - 4A)\right)$. Ainsi A est inversible et

   $$\boxed{A^{-1} = \left(-\frac{1}{4}.(A - 4A)\right) = -\frac{1}{4}A + I}$$

3. Montrer par récurrence que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I$$

   Réponse :

   <u>Initialisation</u>.

   On vérifie que la propriété est vraie pour $n = 0$:

   D'une part $A^0 = I$ et d'autre part $0 \times 2^{0-1}A - (0-1)2^0 I = I$

   <u>Hérédité</u>.

   Soit $n \geq 0$, supposons la propriété vraie au rang n et montrons là au rang $n+1$, c'est à dire montrons que $A^{n+1} = (n+1)2^{n+1-1}A - (n+1-1)2^{n+1}I = (n+1)2^n A - n2^{n+1}I$.

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A \times A^n \\
&= A \times (n2^{n-1}A - (n-1)2^n I) \\
&= n.2^{n-1}A^2 - (n-1).2^n A \\
&= n.2^{n-1}(4A - 4I) - (n-1).2^n A \\
&= n.2^{n-1}.4A - n.2^{n-1}4I - (n-1).2^n A \\
&= n2^{n+1}A - n2^{n+1}I - (n-1).2^n A \\
&= [n2^{n+1} - (n-1)2^n]A - n2^{n+1}I \\
&= 2^n[2n - n + 1]A - n2^{n+1}I \\
&= (n+1)2^n A - n2^{n+1}I \quad \square
\end{aligned}$$

<u>**Conclusion**</u>.
D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 0$, la propriété proposé est vraie.

4. Cette formule est-elle encore valable pour $n = -1$?
Réponse : Oui car la propriété au rang $n = -1$ est l'égalité

$$A^{-1} = -2^{-1-1}A - (-1-1)2^{-1}I = -\frac{1}{4}A - \frac{-2}{2}I = -\frac{1}{4}A + I$$

qui est bien vraie d'après la question précédente.

5. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
Calculer $P \times Q$. En déduire que P est inversible et donner son inverse .
Réponse : Le calcul donne l'identité et donc P est inversible d'inverse P^{-1}

6. Soit $L = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$
   (a) Ecrire l'égalité $LX = U$ sous la forme d'un système.
   Réponse :
   $$\begin{cases} 1x - 2y + 3z = u \\ \quad\quad 2y + z = v \\ \quad\quad\quad -z = w \end{cases}$$
   (b) En « inversant le système », trouver l'expression de L^{-1}
   Réponse : On a $z = -w$ puis
   $y = \frac{1}{2}(v - z) = \frac{1}{2}(v + w) = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w$
   et $x = u + 2y - 3z = u + 2.\frac{1}{2}(v + w) - 3(-w) = u + v + 4w$ Donc : $\begin{cases} x = u + v + 4w \\ y = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w \\ z = -w \end{cases}$

Donc $\boxed{L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

2 Exercice 2 : Probabilités (ECRICOME 2017)

Partie I : tirages dans une urne

Une urne $\mathcal{U}$ contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

1. On procède à 400 tirages successifs avec remise d'une boule dans $\mathcal{U}$. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule noire a été piochée.
   (a) Quelle est la loi de X ? On précisera $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
   Réponse :
   On reconnait ici une épreuve succès/échec qui se répète dans des conditions identiques et indépendantes, la probabilité du succès étant à chaque épreuve de $1/4$ (un succès étant de tirer la boule noire). La variable X comptant le nombre de succès sur les 400 épreuves suit donc une loi binomiale $\boxed{\mathcal{B}\left(400, \frac{1}{4}\right)}$. On a donc
   $\boxed{X(\Omega) = [\![0, 400]\!]}$ et : $\forall k \in X(\Omega)$, $\boxed{P(X = k) = \begin{pmatrix} 400 \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{400-k}}$.
   (b) Donner la valeur de l'espérance de X notée $E(X)$ et vérifier que la variance de X, notée $V(X)$ est égale à 75.
   Réponse :
   L'espérance de X est alors $400 \times \frac{1}{4} = \boxed{100}$ et la variance est $400 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \boxed{75}$
2. On procède cette fois-ci dans $\mathcal{U}$ à une suite de tirages avec remise d'une boule jusqu'à obtenir la boule noire. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
   (a) Quelle est la loi de Y ?
   On précisera $Y(\Omega)$ et $P(Y = k)$ pour tout $k \in Y(\Omega)$.
   Réponse :
   On est toujours dans le cadre d'une répétition d'épreuves succès/échec identiques et indépendantes, la probabilité du succès étant à chaque épreuve de $1/4$ (un succès étant de tirer la boule noire). La variable Y déterminant le rang d'apparition du premier succès suit donc une loi géométrique $\boxed{\mathcal{G}\left(\frac{1}{4}\right)}$. On a donc $\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}^*}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{P(Y = k) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)}$$

(b) Donner la valeur de $E(Y)$ et vérifier que $V(Y) = 12$.
Réponse :
L'espérance de Y est alors $\frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ et la variance est $\frac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 12$.

3. Cette fois-ci, on pioche dans l'urne $\mathcal{U}$ successivement et sans remise les quatre boules. On note Z le numéro du tirage auquel est apparue la boule noire.
   (a) Donner la loi de Z sous forme d'un tableau.
   Réponse :
   Si on tire les boules sans remise, Z ne peut prendre que les valeurs $1, 2, 3, 4$:
   $$Z(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$$
   Notons B_k (respectivement N_k) le k -ième tirage donne une boule blanche (resp. noire). On a :
   - $P(Z = 1) = P(N_1) = \frac{1}{4}$.
   - $P(Z = 2) = P(B_1 \cap N_2) = P(B_1) P_{B_1}(N_2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$
   - $P(Z = 3) = P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1) P_{B_1}(B_2) P_{B_1 \cap B_2}(N_3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
   - et nécessairement $P(Z = 4) = 1 - P(Z = 1) - P(Z = 2) - P(Z = 3) = \frac{1}{4}$. Ainsi Z suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$.

   (b) Calculer $E(Z)$ et de $V(Z)$.
   Réponse :
   L'espérance de Z est donc $\frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$ et la variance est $\frac{4^2 - 1}{12} = \frac{5}{4}$.

4. On suppose maintenant que l'urne $\mathcal{U}$contient 1 boule noire et 99 boules blanches.
   (a) Quelle est la probabilité p de tirer une boule noire ?
   Réponse : 1/99
   (b) On procède à 400 tirages successifs avec remise d'une boule dans $\mathcal{U}$. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule noire a été piochée.
   On suppose que l'on peut approximer la loi de X par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$.
   En vous aidant de la table de loi de Poisson, calculer :
      i. La probabilité de piocher trois fois la boule noire.
      Réponse :
      $P(X = 3) = 0,20$
      ii. La probabilité de piocher au moins 4 fois la boule noire.
      Réponse :
      On cherche $P(X \geq 4)$. Il est préférable ici de calculer la probabilité de l'évènement contraire , soit $P(X \leq 3)$

$P(X \leq 3) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) = 0,02+0,07+0,15+0,20 = 0,44$ (en se servant de la table donnée dans le texte). Donc $\boxed{P(X \geq 4) = 0,56}$

(c) Que valent $E(X)$ et $V(X)$? Pour une loi de Poisson $E(X) = V(X) = \lambda = 4$

Partie II : tirages dans une urne choisie au hasard

L'urne $\mathcal{U}$ contient toujours 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher. L'urne $\mathcal{V}$ contient 2 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher.
On lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur le côté Pile, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{U}$, et si on obtient Face, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{V}$.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a pioché une boule noire.

5. Que vaut $T(\Omega)$?
   Réponse :
   Sur les deux tirages effectués on peut avoir tiré 0,1 ou 2 fois la boule noire. Ainsi $T(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
6. Donner la loi de T. On vérifiera que $P(T=1) = \dfrac{7}{16}$.
   Réponse :
   Notons F l'événement \$ la pièce donne Face set $\bar{F}$ l'événement $\notin$ la pièce donne Pile \$. Alors :
   $$P(T=0) = P(F)P_F(B_1 \cap B_2) + P(\bar{F})P_{\bar{F}}(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{13}{32}$$
   $$P(T=2) = P(F)P_F(N_1 \cap N_2) + P(\bar{F})P_F(N_1 \cap N_2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{32}$$
   On en déduit que :
   $$P(T=1) = 1 - P(T=0) - P(T=2) = 1 - \frac{13}{32} - \frac{5}{32} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$$
7. Calculer $E(T)$.
   Réponse :
   $E(T) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} kP(T=k) = P(T=1) + 2P(T=2) = \frac{7}{16} + 2\frac{5}{32} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.
8. Sachant que l'évènement $[T=1]$ est réalisé, est-il plus probable d'avoir obtenu Pile ou d'avoir obtenu Face avec la pièce ?
   Réponse :
   Remarquons que si F se réalise, alors la loi de T est binomiale de paramètres $(2, 1/2)$. On a donc par exemple :
   $$P_F(T=1) = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

Donc :

$$P_{[T=1]}(F) = \frac{P(F)P_F(T=1)}{P(T=1)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{4}{7}$$

et donc on en déduit que $P_{[T=1]}(\bar{F}) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$. Finalement, si $[T=1]$ est réalisé, il est plus probable d'avoir obtenu Face avec la pièce.

3 Exercice 3 : Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + xe^{-x+2} - 1$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère donné. On rappelle que $e^0 = 1$ et que $e^1 \simeq 2.7$

1. (a) Calculer $f(0) = -1$, $f(1) = e$ et $f(2) = 3$.
   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ par opérations sur les limites.
   (c) $f(x) - (x-1) = x + xe^{-x+2} - 1 - x + 1 = xe^{-x+2}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-1) = 0$ par croissance comparée. Donc la droite d'équation $y = x - 1$ est bien asymptote à la courbe.
   (d) $\boxed{f'(x) = 1 + (1-x)e^{-x+2}}$
   (e) On dérive la fonction précédente : $\boxed{f''(x) = (x-2)e^{-x+2}}$
   (f) $f''(x)$ est du signe de $(x-2)$ puisque e^{-x+2} est toujours strictement positif.
   Donc :
   - Si $x \geq 2$, $f''(x) \geq 0$
   - Si $x \leq 2$, $f''(x) \leq 0$

   La courbe possède donc un point d'inflexion en $x = 2$ puisque $f''(x)$ s'annule en changeant de signe.
   (g) Le tableau des variations de f' est donc le suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	$f'(2) = 0$	$\nearrow$	

   En effet $f'(2) = 1 + (1-2)e^{-2+2} = 1 - 1 = 0$
   (h) D'après le tableau précédent, la fonction f' est toujours positive et ainsi la fonction f est pour sa part croissante.
2. (a) Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	0	α	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	-1	0	$1,7$	$+\infty$

Vérifions les hypothèses du TVI sur l'intervalle $]-\infty,+\infty$:

- f est continue ;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ deux limites de signes opposés ;
- f est strictement croissante.

D'après le TVI, il existe une unique valeur α telle que $f(\alpha) = 0$

(b) La valeur $\alpha \simeq 0,135$ semble cohérente puisque $f(0) = -1$ et $f(1) = e - 1 \simeq 1,7$ (voir tableau).

3. (a) D'après le cours, l'équation de la tangente en $x = 2$ est $y = 3$ comme le prouve le calcul $y = f'(2)(x-2) + f(2) = 0 \times (x-2) + 3 = 3$

(b) Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{D}$, il faut étudier le signe de $f(x)-(x-1)$ dont nous avons déjà déterminé qu'une expression était xe^{-x+2}. Elle est du signe de x donc :

- Si $x \geq 0$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la droite $\mathcal{D}$;
- Si $x \leq 0$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la droite $\mathcal{D}$.

(c) Représentation graphique :