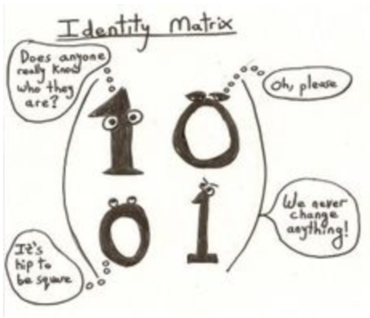
Matrices : Introduction



1 Introduction

Les matrices sont des tableaux de nombres que l'on peut ajouter, soustraire, multiplier et parfois inverser. Nous les utiliserons pour résoudre des systèmes d'équations linéaires, et pour résoudre des problèmes stochastiques (i.e à des processus où le hasard intervient).

Les matrices sont largement utilisées en mathématiques, mais aussi dans de nombreux domaines de la physique, en imagerie numérique et en économie.

Pour introduire les opérations entre matrices : voir l'activité.1 partie exercice.

2 Définition

Une matrice

Une matrice est un tableau rectangulaire ou carré de nombres réels. Ces nombres sont les coefficients de la matrice.

Voici un exemple de matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0,1 & 0,2 & -12 \end{pmatrix}$

C'est un tableau de nombres réels. Celle-ci est une matrice 2×3, c'est-à-dire qu'elle a 2 lignes et 3 colonnes.

Égalité

On dit que deux matrices sont égales quand tous leurs coefficients sont égaux un à un.

L'ensemble de toutes les matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Matrice carrée

Une matrice est dite carrée lorsqu'elle a autant de lignes que de colonnes.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2,3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée 2×2.

Matrice ligne/colonne

Une matrice **ligne** est une matrice qui n'a qu'une ligne.
Une matrice **colonne** est une matrice qui n'a qu'une colonne.

Exemple : $\begin{pmatrix} 3,2 & -4 & 1 & 0,2 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne et $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

L'ensemble de toutes les matrices carrées à n lignes et n colonnes est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Matrice nulle

Une matrice carrée est dite **nulle** lorsque tous les coefficients sont nuls. On note cette matrice avec le même symbole 0 lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le nombre de ligne et de colonnes.

La matrice nulle est l'élément neutre de l'addition : pour toute matrice A, $A + 0 = A$

3 Opérations sur les matrices

Il est possible d'appliquer aux matrices certaines des opérations que l'on a l'habitude d'appliquer aux nombres, comme l'addition et la multiplication.

3.1 Addition

Addition

Pour ajouter deux matrices, elles doivent avoir **les mêmes dimensions**. Dans ce cas, la somme des deux matrices est obtenue en effectuant la somme des coefficients de même position.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0,1 & 0,2 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3,12 & -5 & 2 \\ 5,8 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,12 & -5 & 0 \\ 5,9 & 2,2 & -13 \end{pmatrix}$$

Commutativité

L'addition de deux matrices est commutatives. Pour toutes matrices A et B de même taille, on a

$$A + B = B + A$$

Soustraction. La soustraction s'effectue exactement de la même façon que l'addition.

3.2 Multiplication par un nombre

Définition

La multiplication d'une matrice A par un nombre $k \in \mathbb{R}$ s'obtient en multipliant chaque coefficient de la matrice par k. On la note $k.A$

Remarque : On utilise un point plutôt que le symbole $\times$ pour éviter de confondre avec la multiplication de deux matrices.

Exemple : $5.\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0,1 & 0,2 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 0,5 & 1 & -60 \end{pmatrix}$

Cas particulier

Lorsque $k = -1$, la matrice $(-1).A$ est notée $-A$. C'est la matrice opposée de A.
Elle vérifie la propriété $A + (-A) = 0$.
Ceci donne un sens à la **soustraction** : pour soustraire B à A on additionne $-B$. On retrouve ainsi la règle bien connue sur les nombres relatifs.

Exemple :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0,1 & 0,2 & -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3,12 & -5 & 2 \\ 5,8 & 2 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0,1 & 0,2 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3,12 & 5 & -2 \\ -5,8 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2,12 & 5 & -4 \\ -5,7 & -1,8 & -11 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3.3 Multiplication de matrices

Multiplication d'une matrice ligne et d'une matrice colonne

On peut multiplier une matrice ligne à n colonnes par une matrice colonne à n lignes.

Exemple : multiplication d'une matrice 1 ligne, 4 colonnes par une matrice 4 lignes, 1 colonne.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \times a' + b \times b' + c \times c' + d \times d' \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2.5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 3 + (-2) \times 5 + 0 \times (-4) + 2.5 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}$$

Multiplication de matrices dans le cas général

On ne peut multiplier deux matrices que si que le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la deuxième.
Dans ce cas si A est une matrice $n \times p$ et B une matrice $p \times q$, le produit $C = A \times B$:

- est une matrice $n \times q$;
- Le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est obtenu en multipliant la i-ème ligne de A par la j-ème colonne de B en appliquant la règle précédente

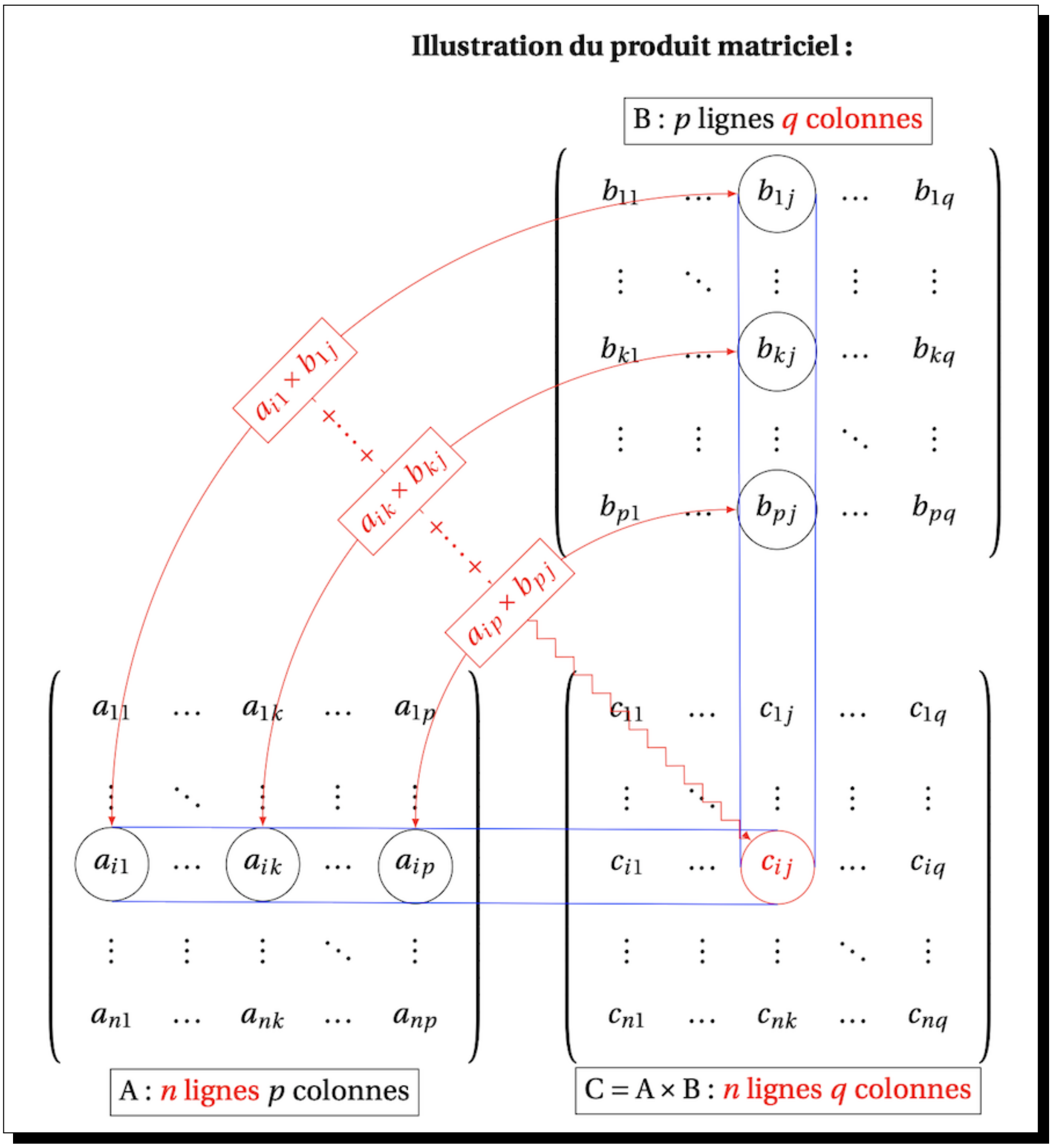


Figure 1 – Disposition pratique pour visualiser un produit matriciel

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 2 & 4 \\ -3 & -10 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Multiplication par la matrice nulle

La matrice nulle multipliée par n'importe quelle matrice donne toujours la matrice nulle : Pour toute matrice A, $A \times 0 = 0 \times A = 0$.

Non commutativité de produit

En général le produit $A \times B$ n'est pas égal au produit $B \times A$

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ mais $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Propriété des opérations

Si A, B, C sont trois matrices telles que tous les produits sont bien définis on a les propriétés suivantes (on note les nombres par des lettres grecs pour éviter les confusions) :

- **Associativité du produit matriciel :** Les produits $A(BC)$ et $(AB)C$ le sont aussi et ils sont égaux.
$$A(BC) = (AB)C$$
- **Associativité du produit par un nombre :** Si λ et μ sont deux réels,
$$\lambda.(\mu.A) = (\lambda \times \mu).A$$
- **Distributivité à gauche :** Si λ et μ sont deux réels,
$$A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC$$
- **Distributivité à droite :** Si λ et μ sont deux réels
$$(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC$$

4 Ecriture d'un système linéaire à l'aide de matrices

Système linéaire 2×2

Un système linéaire à deux équations et deux inconnues x et y est la donnée d'équation sous l'une des deux formes suivantes :

- **Sous la forme d'un système** :
$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases} \quad \text{où } a, b, c, d, u, v \text{ sont des constantes}$$
- **Sous une forme matricielle** $\boxed{AX = B}$ où A est une matrice 2×2, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et B une matrice colonne.

Au programme d'ECT, il faut savoir passer d'une forme à l'autre :

Exemple : le système $\left\{\begin{array}{cccc} 2x & + & 3y & = & -5 \\ x & + & 2y & = & 3 \end{array}\right.$ peut se mettre sous forme matricielle :

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Alors $AX = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ x + 2y \end{pmatrix}$

Donc le système est bien équivalent à $\boxed{AX = B}$

Cas des systèmes 3×3

La principe est rigoureusement le même.

Exemple : $\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & 3y & +5z & = -5 \\ x & + & 2y & -z & = 3 \\ -3x & + & 4y & +2z & = 0 \end{array}\right.$

se met sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$