Lycée Grand Nouméa
ECT2
A. DA SILVA

Activité autours des matrices

Année 2021

Etude de la dynamique d'une population

Dans une fédération sportive, il y a deux catégories de jeunes : les poussins et les benjamins. Chaque année la moitié des benjamins part en catégorie supérieure en minimes, l'autre moitié reste en benjamins, la moitié des poussins part en benjamins, l'autre moitié reste en poussins. On note que , chaque année, 15 000 nouveaux adhérents en catégorie poussins et 10 0000 en catégorie benjamins.

On suppose qu'en 2020 (année notée 0), le club comptait 35 000 poussins et 60 000 benjamins.

Afin de prévoir les investissements nécessaires, on souhaite prévoir l'évolution des nombres de poussins et de benjamins en supposant que les mouvements sont les mêmes d'une année à l'autre.

Pour cela, on note b_n et p_n les nombres de benjamins et de poussins à l'année n **exprimés en milliers**. Par exemple b_{13} désigne le nombre de benjamins prévu en 2033.

Modélisation à l'aide de matrices

1. Donner b_0 et p_0 et calculer p_1, p_2, b_1, b_2.
2. Montrer que l'on a les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{1}{2}p_n + 15 \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{2}p_n + 10 \end{cases}$$

3. Soit U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} p_n \\ c_n \end{pmatrix}$ pour n entier naturel.
   Ecrire le système précédent sous la forme $U_{n+1} = AU_n + B$ où A est une matrice carrée et B une matrice colonne.

Calcul de A^n

4. Déterminer la matrice T telle que $A = \dfrac{1}{2}I + T$ (où I est la matrice identité d'ordre 2) , puis calculer T^2.
5. Calculer A^2 en fonction de I et T. En déduire A^3.
6. Montrer par récurrence, pour $n \geq 1$, que $A^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (I + 2nT)$. En déduire A^n.

Calcul de p_n et de b_n en fonction de n

7. Déterminer la matrice $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ telle que $X = AX + B$.

8. En déduire que la suite V_n définie par $V_n = U_n - X$ vérifie, pour $n \geq 1, V_{n+1} = AV_n$.
9. En déduire V_n en fonction de V_0 puis montrer que $U_n = A^n\left(U_0 - X\right) + X$.
10. Déduire des résultats précédents les expressions de p_n et de b_n en fonction de n.

Conclusion

En déduire l'évolution du nombre de poussins et de benjamins quand n devient grand, c'est à dire quand $n \to \infty$